1　連続の式

連続の式は質量の保存則から導かれるものである．非圧縮性流体の密度は変化しないので，質量の保存則と体積流量の保存則とは同じ意味になる．したがって，この二つをいずれも連続の式という場合が多い．

まず二次元の流れ場について説明する．図 5 に破線で示すような流線をもつ流れ場に，座標軸 x と y に平行に，辺の長さがそれぞれ Δx と Δy である直方体の微小検査体積 PQRS をとる (紙面奥行方向に単位長さ 1，流体の密度を ρ とすると，この検査体積内に含まれる質量は $\rho\Delta x\Delta y$ である．

一方，検査体積に流入する質量には，面 SP から流入するものを例にとれば，速度 $\boldsymbol{V}$ のうち x 方向成分 u が関係し，y 方向成分 v は関係しない．他の面についても同様に考えれば，Δt 時間に**流入**する質量は，図 5 の場合面 PQ と面 SP からであり，それぞれ次のようになる．

$$\text{面 PQ から：}(\rho v)\,\Delta t\Delta x \tag{1}$$

$$\text{面 SP から：}(\rho u)\,\Delta t\Delta y \tag{2}$$

ここで v は面 PQ 上で必ずしも一定ではないが，Δx が小さいので PQ 上の y 方向速度は近似的に v で表すことができる．他の面も同様である．一方，Δt 時間に**流出**する質量は，面 RS と面 QR からであり，次のように表される．

$$\text{面 RS から：}\left[\rho v+\frac{\partial\,(\rho v)}{\partial y}\Delta y\right]\Delta t\Delta x \tag{3}$$

$$\text{面 QR から：}\left[\rho u+\frac{\partial\,(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right]\Delta t\Delta y \tag{4}$$

ここでかっこの中の第 2 項はそれぞれ ρv と ρu の変化分である．この場合，RS 上の y 方向速度の x 方向変化 $\partial v/\partial x$ は微小として，v の y 方向変化 $\partial v/\partial y$ のみを考慮している．したがって Δt 時間に流入する質量と流出する質量の差は，**流入（$+$ の符号を付ける）** と **流出（$-$ の符号を付ける）** に注意すると次式のように表される．

$$\begin{aligned}&\rho v\Delta t\Delta x+\rho u\Delta t\Delta y-\left[\left(\rho v+\frac{\partial\,(\rho v)}{\partial y}\Delta y\right)\Delta t\Delta x+\left(\rho u+\frac{\partial\,(\rho u)}{\partial x}\Delta x\right)\Delta t\Delta y\right]\\&=-\frac{\partial\,(\rho u)}{\partial x}\Delta t\Delta x\Delta y-\frac{\partial\,(\rho v)}{\partial y}\Delta t\Delta x\Delta y\end{aligned} \tag{5}$$

この差は Δt 時間内に検査体積に貯えられる質量 $\Delta\,(\rho\Delta x\Delta y)$ に等しいから，次の関係が成り立つ．

$$\Delta\,(\rho\Delta x\Delta y)=-\frac{\partial\,(\rho u)}{\partial x}\Delta t\Delta x\Delta y-\frac{\partial\,(\rho v)}{\partial y}\Delta t\Delta x\Delta y \tag{6}$$

両辺を $\Delta t\Delta x\Delta y$ で除し，Δt を 0 に近づけると，次の連続の式を得る．

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\,(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial\,(\rho v)}{\partial y}=0 \tag{7}$$

密度 ρ が一定 (非圧縮性流体) の場合は，流れが定常か非定常かにかかわらず，次式が成り立っ．

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{8}$$

3 次元では z 方向速度成分を w とすると，式 (7)，(8) に対応する式として次式を得る．

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\,(\rho u)}{\partial x}+\frac{\partial\,(\rho v)}{\partial y}+\frac{\partial\,(\rho w)}{\partial z}=0 &(9)\\&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 &(10)\end{aligned}\right.$$

ベクトル形式では，

$$\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{V})=0 &(11)\\&\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0 &(12)\end{aligned}\right.$$

となる．