

3 粘性とせん断力

実在流体にはせん断応力が働く．このことが実在流体の流れと完全流体の流れとの根本的な差異である．したがって実在流体の流れを取り扱う場合には検査体積に作用する外力として，この力を考慮に入れなければならない．別のいい方をすれば，完全流体に対する運動量の保存式であるオイラーの運動方程式に，粘性による応力の項を付け加えれば，実在流体に対する運動量の保存式（力の平衡式）が得られるのである．さて，表面力のうち，圧力は検査体積を構成する面の外から内へ垂直に押す力を及ぼしていることは，すでに説明した．もう一つの表面力であるせん断応力は面に接する方向に働くが，その向きはどうなるのであろうか．図 3.1 に示すように，平面壁

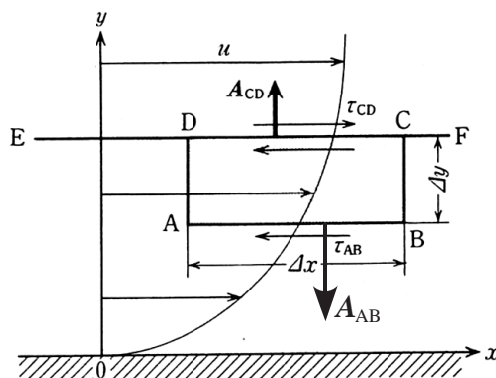


図 3.1 せん断力の作用する向きの定義

に平行に， x 軸の正の向きに流れている十分発達した二次元の流れを考えてみよう．壁面に平行な流れの速度 u はこの図に示すように，固体壁面でのスリップなしの境界条件（壁面上で速度 $V = 0$ ，すなわち $u = v = 0$ ）により，壁面上の値 0 から y の増加にしたがって増加する．このような流れ場の中に EF で示す一つの流面を想定すると，この面 EF より上側の流体粒子は，その下側の流体粒子より速く流れているため，面 EF の下側の流体粒子を x 軸の正の向きに引張り，逆に面 EF より下側の流体粒子は上側の流体粒子を x 軸の負の向きに引張っている．

一方，せん断応力 τ は次式で定義されているが，速度 u が y 方向に増加する ($du/dy > 0$) 流れ場では，その符号は正である．

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (> 0) \quad (3.1)$$

そこで，図 3.1 に ABCD で示す x 軸と y 軸に平行な面をもつ検査体積をとり，これに働くせん断応力による力の向きを検討する．上で述べたことを考慮すれば，面 AB ではそれより下側の流体粒子は検査体積内の流体粒子を x の負の方向に引張っており，面 CD においては，面 CD より上側の流体粒子が x の正の向きの力を検査体積内の流体粒子に及ぼしていることがわかる．すなわち，検査体積に働く x 軸方向のせん断応力には面 AB に τ_{AB} ，面 CD に τ_{CD} があり，その力の正の向きは図の矢印で示す通りである．

検査体積に外力として作用しているせん断応力の向きを，以上に述べた，力が実際に作用している向きと矛盾しないように，普通次のように定義している．

「考えている面（例えば面 CD）を外向き法線ベクトル（図 3.1 では A_{CD} ）で表したとき，そのベクトルの向きが座標軸の一つ（ A_{CD} の場合 y 軸）と同じ向きであれば，もう一つの座標軸（この場合 x 軸）の正の向きを，その面に働くせん断応力の正の向きとする．」

例として τ_{AB} の場合を考えてみよう．面 AB を表す法線ベクトルの向きは y 軸の正方向と逆，すなわち負方向であるから τ_{AB} による力の向きは，定義に従うと x 軸の負方向となり，上述の τ_{AB} による力の実際の向きと矛盾しない．

4 検査体積に働く粘性応力

4.1 二次元の流れ場

流れの中にとった微小検査体積 ABCD のそれぞれの面には、粘性応力が作用しているが、この粘性応力は面の接線方向に作用するせん断応力と法線応力 (例えば σ'_x) とに分解することができる。このうち x 方向の力となる粘性応力は、図 1 に示すように面 AB と面 CD に作用するせん断応力と面 AD と面 BC に作用する法線応力である (面 AB と面 CD に作用する法線応力と、面 AD と面 BC に作用するせん断応力は y 方向の力となり関係がない)。これらの力のうち x 軸の正の向きの力から負の向きの力を差引いた正味の力は紙面に垂直方向の単位長さ当り、

$$\left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} \Delta y \right) \Delta x + \left(\frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} \Delta x \right) \Delta y \quad (4.1)$$

である。これを $\rho \Delta x \Delta y$ で除せば、検査体積の単位質量当りに作用する x 方向の粘性力 $(f_v)_x$ が得られる。

$$(f_v)_x = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} \right) \quad (4.2)$$

上式に

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \gamma_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (4.3)$$

$$\sigma'_x = 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.4)$$

を代入すると、次式を得る。 γ_{xy} はひずみ速度という。

$$\begin{aligned} (f_v)_x &= \frac{1}{\rho} \left[\mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \right] \\ &= \frac{\mu}{\rho} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (4.5)$$

右辺第 2 項は連続の式より 0 となる。動粘性係数 (kinematic viscosity) $\nu = \mu/\rho$ を用いて表せば、

$$(f_v)_x = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4.6)$$

となる。同様にして y 方向の粘性力は次式のように表される。

$$(f_v)_y = \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (4.7)$$

4.2 3次元の流れ場

3次元の流れ場では、二次元の場合と同様に粘性力は次式のように求められる。

$$\begin{aligned} (f_v)_x &= \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \nu \nabla^2 u \\ (f_v)_y &= \nu \nabla^2 v, \quad (f_v)_z = \nu \nabla^2 w \end{aligned} \quad (4.8)$$

ここで、 ∇ は次式により定義される。 ∇^2 はラプラシアンとよばれる。

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (4.9)$$

5 ナビエ・ストークスの式（粘性流体に関する運動量の保存式）

まず，2次元の流れ場を考える．オイラーの運動方程式に外力として前回求めた粘性力項を付加することにより粘性流体における運動量の保存則が導出される．

x 方向:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.1)$$

y 方向:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = g_y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.2)$$

(5.1) と (5.2) は，粘性流体の二次元の流れに対する運動量の保存を表した最も一般的な式である．3次元における流れ場の x 方向運動量保存の式は次式となる．

x 方向:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = g_x - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (5.3)$$

y 方向と z 方向にも同様の式が成り立つ．これらをベクトル形式で表すと，

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \mathbf{f}_B - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (5.4)$$

テンソル形式では次式となる．

$$\frac{DV_i}{Dt} = f_{Bi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \left(\frac{1}{3} \frac{\partial^2 V_j}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2 V_i}{\partial x_j^2} \right) \quad (5.5)$$

同じ時期に互いに独立して研究を進めて，この式を発表した二人にちなんで，この式をナビエ・ストークスの式 (Navier-Stokes equation) とよぶ．この式と連続の式は非圧縮性流体の挙動のすべてを表していると考えられている．

6 ナビエ・ストークス式の厳密解

【例題】クエットの流れ

図2に示すように二枚の十分広い平板を h だけ離して水平に置く．下側の板は静止しており（固定壁面），上側の板が一定の速度 U で下側の板に平行に動いている．このとき，二枚の板の間の流体の流れの断面内速度分布と流量を求めよ．ただし，流体の密度を ρ ，粘度を μ とする．（このような流れをクエットの流れ (Couette flow) とよぶ）．

【解】 図2に示すように，板が動いている向きに x 軸を，それと垂直上向き（重力の向きと反対の向き，すなわち $g_y = g$ ）に y 軸をとる．板は十分広いので，板の動きによって誘起されている流れは，紙面に垂直な方向に関して一様な二次元の十分発達した流れ，すなわち u は y のみの関数であると仮定することができる．この条件のもとでは基礎式は次のようになる．

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6.1)$$

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} \quad (6.2)$$

境界条件は，固定壁面でスリップ0の条件から，次のように与えられる．

$$\begin{cases} y = 0 : u = 0, \\ y = h : u = U \end{cases} \quad (6.3)$$

式(6.2)を y で積分すれば，次式となる．

$$p = -\rho g y + f(x) \quad (6.4)$$

この式と，流れが十分発達していることを考えると， $\partial p / \partial x$ は以下のように一定値でなければならない．

$$\frac{\partial p}{\partial x} = f'(x) = \text{const.} \quad (6.5)$$

したがって式(6.1)の右辺は y の関数ではないので，式(6.1)を y について二回積分すれば，次式となる．

$$u = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) y^2 + C_1 y + C_2 \quad (6.6)$$

ここで，式(6.3)の境界条件を用いると， C_1 及び C_2 は次式となる．

$$\begin{cases} C_2 = 0, \\ C_1 = \frac{U}{h} - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) h \end{cases} \quad (6.7)$$

よって，速度分布 u は次式で表される．

$$u = U \frac{y}{h} - \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) (hy - y^2) \quad (6.8)$$

u の分布は図3に示すように， $\partial p / \partial x = 0$ のとき直線状， $\partial p / \partial x \neq 0$ のとき放物線状となる．上の板も静止している場合には，式(6.8)で $U = 0$ とおけばよく，その流れは $\partial p / \partial x < 0$ のとき，図3に破線で示すように $y = h/2$ (流路幅の中心) の面に対称な流れとなる．

次に流量を求めよう．流れは二次元的であるから， y 方向に長さ dy で，紙面に垂直な方向 (z 方向) には単位長さの，微小面積 $1 \times dy$ を通過する微小体積流量 dq は $u dy$ である．全断面の流量 Q はそれを積分して次式で与えられる．

$$Q = \int dq = \int_0^h u dy \quad (6.9)$$

この式に式(6.8)を代入して積分を実行すれば，流量 Q は次のようになる．

$$Q = \frac{h}{12} \left[6U - \frac{h^2}{\mu} \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right) \right] \quad (6.10)$$

6.1 クエット流れの別解

図 2 に示す流体の微小体積要素における釣り合いを考えると次式が導出される .

$$p\delta y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\delta x\right)\delta y - \tau\delta x + \left(\tau + \frac{d\tau}{dy}\delta y\right)\delta x = 0 \quad (6.11)$$

上式より , 次式となる .

$$\frac{d\tau}{dy} = \frac{\partial p}{\partial x} \quad (6.12)$$

ここで , この問題は十分発達した流れを仮定しているので , τ は y のみの関数となる . さらに , ニュートンの粘性則より ,

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (6.13)$$

となり , 式 (6.13) を式 (6.12) に代入すると

$$\mu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{dp}{dx} \quad (6.14)$$

となり , 式 (6.1) に一致する (前節より $\partial p / \partial x = \text{const.}$ を考慮しているので偏微分を常微分に修正している)

7 円管内層流 (ポアズイユ流れ)

[例題] 半径 R の直円管内を密度 ρ , 粘度 μ の流体が鉛直下方に定常に流れている . 流れは十分発達しているとして , 円管内の管軸方向速度 u の半径方向分布 , 流量 Q および平均流速 \bar{u} を求めよ .

[解] 図 4 に示すように , 重力の向きに x 軸の正の向きをとり , 円管内に半径 r の位置で厚さ Δr , 長さ Δx の環状の検査体積をとる . この検査体積に働く力は流れの十分発達の条件より $\sigma'_x = 0$ であるから , 重力、せん断応力および圧力による力で , それらは x 軸の正の向きを正とすれば以下のように表される .

1. 重力による力 : 微小検査体積の体積は $2\pi r \Delta r \Delta x$ であるから、重力による力は x の正の向きに $\rho g(2\pi r \Delta r \Delta x)$ である .
2. 圧力による力 : 圧力が働く面積は $2\pi r \Delta r$ あるから , 正の力は $p(2\pi r \Delta r)$, 負の力は

$$\left(p + \frac{\partial p}{\partial x}\Delta x\right)(2\pi r \Delta r) \quad (7.1)$$

である . したがって正味の力はこれらの差を取って , 負の向きに

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right) 2\pi r \Delta x \Delta r \quad (7.2)$$

である .

3. せん断応力による力 : せん断応力の向きの定義にしたがうと , 図 4 に示しているように検査体積の内面に働く $\tau(2\pi r \Delta x)$ の力は負で , 外面に働く

$$\left(\tau + \frac{\partial \tau}{\partial r}\Delta r\right) 2\pi (r + \Delta r) \Delta x = 2\pi \Delta x \left(\tau r + \frac{\partial(\tau r)}{\partial r}\Delta r\right) \quad (7.3)$$

の力は正である (ここで , $()$ 内の二次の微小項は無視している) . したがって正味の力は正で , $2\pi \Delta x \Delta r [\partial(\tau r) / \partial r]$ である .

以上の検討から，検査体積に働く力の平衡式は次のようになる．

$$2\pi\Delta x\Delta r \left[\rho g r - \frac{\partial p}{\partial x} r + \frac{\partial(\tau r)}{\partial r} \right] = 0 \quad (7.4)$$

これを整理すれば次式となる．

$$\frac{1}{r} \frac{d(\tau r)}{dr} = \frac{dp}{dx} - \rho g \quad (7.5)$$

ここで流れは十分発達しているから， τ は r のみの関数であり，かつ前節より $\partial p / \partial x = \text{const.}$ を考慮しているので偏微分を常微分に修正している．一方， τ は次式，

$$\tau = \mu \frac{du}{dr} \quad (7.6)$$

で与えられるので，式 (7.5) は次式のようになる．

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) = \frac{r}{\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \right) \quad (7.7)$$

上式は二階の微分方程式であるから，二つの境界条件が必要である．これに対しては固体壁面上でのスリップなしの条件と，速度分布が $r = 0$ で最大値をとる，軸対称な分布となることが容易に予測できるので，次のように与えられる．

$$\begin{cases} r = R : & u = 0 \\ r = 0 : & \frac{du}{dr} = 0 \end{cases} \quad (7.8)$$

式 (7.7) を r で積分すれば，次式となる．

$$r \frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \right) r^2 + C_1 \quad (7.9)$$

式 (7.8) の第 2 の境界条件から $C_1 = 0$ となるから，式 (7.9) は，

$$\frac{du}{dr} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \right) r \quad (7.10)$$

となる．これをもう一度 r で積分すれば，次式を得る．

$$u = \frac{1}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \right) r^2 + C_2 \quad (7.11)$$

今度は式 (7.8) の第 1 の境界条件を用いて C_2 を定めれば，結局，速度分布 u は次式となる．

$$u = -\frac{1}{4\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \right) (R^2 - r^2) \quad (7.12)$$

次に流量 Q を求める． ds を検査体積の環状の微小面積とすれば，そこを通過する微小流量は uds である．これに式 (7.11) を代入して積分すれば，流量 Q は，

$$Q = \int u ds = \int_0^R u (2\pi r dr) = -\frac{\pi R^4}{8\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \right) \quad (7.13)$$

となる．また管内平均流速 \bar{u} は次式で与えられる．

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{R^2}{8\mu} \left(\frac{dp}{dx} - \rho g \right) \quad (7.14)$$

8 流線，流跡線および流脈線

8.1 流線と流管

図 1 (a) に示すように，流れの中に想定したある曲線上のどの点においても，その点の接線の方向と速度の方向とが一致するとき，この曲線を流線 (streamline) という．また流れの中の一つの閉曲線を通る流線群は，(b) に示すように一つの管を構成する．これを流管 (streamtube) という．この定義からわかるように，流線は決して互いに交わることはない．なぜならもし交われば，その点より下流で，流体粒子は二つの経路を通ることができることになり，流れの経路が定まらないという不合理が生じるからである．二次元の流れ場における流線のある点の線素をベクトルを ds ，その成分を (dx, dy) ，その点の速度をベクトル V ，その成分を (u, v) とすれば，図 1 (a) より $u dt = dx$ ， $v dt = dy$ であるから，流線と速度との関係として，

$$\frac{v}{u} = \frac{dy}{dx} \quad (8.1)$$

が成り立つ．これを拡張すれば，三次元の流れ場の流線の式として次式を得る．

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} \quad (8.2)$$

【参考】流管の面のように流線を連ねてできる面を流面 (stream surface) という．

8.2 流跡線

ある流体粒子に着目して，その粒子が通過して行った跡をたどった線を流跡線 (pathline) という．このとき次式が成立する．

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt \quad (8.3)$$

8.3 流脈線

流れの中のある一点を次々に通過して行った流体粒子の連なりを，流脈線 (streakline) という一流れの中に，注射針で染料を導入したときに観察される線がこれである．

【参考】図 2 (a) は実線で示すように，一点 A からトレーサを注入して定常な流れを観察したもので，定常な流れ場では粒子は流線に沿って流れるから流線，流跡線および流脈線はすべて一致する．この状態から急に x 方向に流れの速度が増加した場合，流線，流脈線および流跡線はそれぞれ (b)，(c) および (d) に実線で表すように，それぞれ異なった線となる．この例からわかるように，非定常な流れではこれらの三つの線は互いに異なるので，トレーサを用いて流れを可視化する場合には，それは何を観察しているのかをよく考えておかなければならない．

9 流線と流れ関数

簡単なように流れ場は二次元であるとし，次の式を満足する関数 $\psi(x, y)$ があったとする．

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -v \quad (9.1)$$

この関数 ψ は x と y の関数であるから，その全微分 $d\psi$ に式 (9.1) を代入したものは次式で与えられる．

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy = -v dx + u dy \quad (9.2)$$

この式と流線を表す式 (8.1) を変形した次式， $u dy - v dx = 0$ とを比較すれば明らかなように，流線上では次式が成り立つ．

$$d\psi = -v dx + u dy = 0 \quad (9.3)$$

すなわち、式 (9.2) を積分した $\psi(x, y) = \text{const.}$ の曲線は流線を表している。この関数 $\psi(x, y)$ を流れ関数 (stream function) という。

流れ関数を用いて連続の式の左辺を書き直すと、次式のように恒等的に 0 となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = 0 \quad (9.4)$$

このことは、 ψ は常に連続の式を満足することを意味する、

図 3 に示す二つの流線 $\psi_1 = \text{const.}$ と $\psi_2 = \text{const.}$ との間を流れる流量を求めよう。いま経路 (A) を左から右へ横切って流れる流量を正とすると、経路 (A) の線分 $ds(dx, dy)$ を横切る微小流量 dQ のうち、 dy の部分を速度 u で横切る量 udy は正の値であり、 dx の部分を v で横切る vdx は、経路 (A) の右から左へ横切る流量となるから負の値となる。したがって dQ はこれらの和、

$$dQ = udy - vdx \quad (9.5)$$

で与えられる。この式を式 (9.2) と比較すれば明らかなように、 dQ は $d\psi$ に等しい。したがって式 (9.5) を積分すれば、

$$Q = \int_1^2 dQ = \int_1^2 d\psi = \psi_2 - \psi_1 \quad (9.6)$$

となる。すなわち流れ関数の差は、それら二つの流線の間の流量を表す。

【注 2】経路 (B) の場合 ds の方向は dx の負の方向であるから、経路 (B) の線要素 ds の左から右へ通過する流量 dQ は、同様に $v(-dx) + udy$ で与えられる。このことは積分の経路に関係なく式 (9.6) が成り立つことを意味する。

10 速度と速度ポテンシャル

簡単のために二次元の流れ場を考える。いま、ある関数 $\phi(x, y)$ が次の関係を満足するものとする。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (10.1)$$

ここで、渦度 Ω の各成分は次式によって表され、

$$\Omega_x = \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \Omega_y = \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \quad \Omega_z = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (10.2)$$

となる。式 (10.2) の Ω_z に式 (10.1) を代入すれば、

$$\omega_z = \frac{1}{2} \Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right) \right] = 0 \quad (10.3)$$

となり、常に $\omega_z = 0$ となる。このことは回転がある流れ場すなわち $\omega \neq 0$ である流れ場では、式 (10.1) の関係を与える関数 ϕ は定義できないことを意味している。逆に ϕ は式 (10.3) を常に満足するので、どの点においても常に $\omega = 0$ である非回転の流れ場では常に存在し、その ϕ を求めれば、流れ場のどの点の速度も式 (10.1) から定められる。この $\phi(x, y)$ を速度ポテンシャル (velocity potential) という。非回転の流れである渦なし流れ (irrotational flow) では常に ϕ が存在するので、非回転の流れをポテンシャル流れ (potential flow) という。

連続の式は流体の運動を支配する最も重要なものであるから ϕ もそれを満足しなければならない。非圧縮性の流れ場の連続の式を ϕ を使って表すと、次式となる。

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (10.4)$$

以上のことを拡張すれば三次元の流れ場では次式を得る。

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (10.5)$$

式 (10.5) の形式の偏微分方程式をラプラスの方程式という。例えば式 (10.5) で ϕ を電位 V で置き換えたラプラスの方程式は、電磁気学で重要な式であり、空間に電荷が全くない場合の電位分布を求める際の基礎式となる。

11 流れ関数と速度ポテンシャルの関係

速度ポテンシャルは、定義式からわかるように、流体を流す能力 (ポテンシャル) である。山から水が流れ下ることにとえば、ポテンシャルはその場所の高さに相当する。流体は傾斜の最も大きい方向を選んで流れていくことからわかるように、流れの道すじである流線と $\phi = \text{const.}$ で与えられる等ポテンシャル線とは直交する。二次元の流れ場に対して、以下にこのことを数学的に証明する。

等ポテンシャル線は次式で与えられる。

$$d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy = udx + vdy = 0 \quad (11.1)$$

従って、 x と y を座標軸とする平面における等ポテンシャル線のこう配 $(dy/dx)_\phi$ は、式 (11.1) を変形して $-u/v$ である。また、流線の式 (9.3) を用いると、 $\psi = \text{const.}$ ($d\psi = 0$) の線のこう配 $(dy/dx)_\psi$ は v/u となり、次式が成り立つ。

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_\psi \left(\frac{dy}{dx}\right)_\phi = \left(\frac{v}{u}\right) \times \left(-\frac{u}{v}\right) = -1 \quad (11.2)$$

このことは、流線と等ポテンシャル線との交点におけるそれぞれの接線が互いに直交すること、簡単にいえば、流線と等ポテンシャル線とが常に直交することを意味している。

流れ関数の式 (9.1) および速度ポテンシャルの式 (10.1) から、次の関係を得る。

$$u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (11.3)$$

また、 ϕ が極座標系で与えられている場合、 r と θ 方向の速度は、次の式で与えられる。

$$V_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\theta}, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial\phi}{\partial\theta} = -\frac{\partial\psi}{\partial r} \quad (11.4)$$

この関係式 (11.3), (11.4) が成り立つとき、 ϕ と ψ についてのコーシー・リーマン (Cauchy-Riemann) の関係が成り立つという。

非回転の流れの条件、すなわち $\omega_z = 0$ を、流れ関数を用いて表現すれば、

$$\omega_z = \frac{1}{2}\Omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (11.5)$$

となる。式 (10.5) と式 (11.5) に示されるように、ポテンシャル流れでは ϕ と ψ はいずれもラプラスの方程式を満たしている。

12 渦度と循環

図 4 に示すように、流れの中に一つの閉曲線 C を想定する。その曲線上の点の速度 V を、曲線の接線方向に分解した速度成分を V_s とし、 V_s を曲線 C に沿って一周積分したものを、曲線 C についての循環 (circulation) Γ と定義する。すなわち、次式となる。

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \oint_C V_s ds = \oint_C (u dx + v dy + w dz) \quad (12.1)$$

曲線 C に沿う積分では、 C によって囲まれた領域を左にみるように進む易合を正の向きとする。図 4 では反時計回りが正である。この積分の方向は渦の回転方向と循環 Γ の符号との関係を定義するものであるから、かつてに変わってはならない。いま簡単のために図 5 に示す二次元の流れ場で、微小四辺形 $ABCD$ に沿う循環 $d\Gamma$ を式 (12.1) にしたがって求める。

$$\begin{aligned} \text{AB に沿っての } d\Gamma: & u dx \\ \text{BC に沿っての } d\Gamma: & \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dy \end{aligned} \quad (12.2)$$

CD に沿っての $d\Gamma$ は、 C から D への向きが x の負の向きであり、速度の正の向きと反対であるから、すなわち式 (12.1) で $v = w = 0$ 、速度 > 0 、 $dx < 0$ であるから、マイナスの符号が付いて： $-\left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy\right) dx$

DA に沿っての $d\Gamma$ は y の負の向きであるから： $-v dy$
である。循環 $d\Gamma$ はこれらの和であるから、次のように渦度と関連づけられる。

$$\begin{aligned} d\Gamma &= u dx + \left(v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \right) dy - \left(u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \right) dx - v dy \\ &= \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = \Omega_z dx dy \end{aligned} \quad (12.3)$$

この式は、微小面積 $dx dy$ とその内部の渦度 Ω_z との積が循環であることを示している。渦度が流れ場に分布している場合には、図 6 に示すように領域を格子状に分割してそれぞれの小領域の循環を求め、それらの総和を求めれば、領域内の循環が求まる。ただし小領域の循環の計算では、次のことを考慮するとよい。すなわち、例えば図中の辺 1-2 に沿う渦 A の循環と、渦 B の循環とは互いに逆向きで同じ値をとるからその和は 0 となる。このことは閉曲線 C 内のすべての辺の上でも同様に成り立つ。したがって最も外側にある曲線 C 上の積分だけが残る。すなわち、次式が成り立つ。

$$\Gamma = \int_C \Delta\Gamma = \int_C \Omega_z dx dy \quad (12.4)$$

以上のことからわかるように、渦度と循環とは等価な量である。

【例題 1】非圧縮性流体の二次元の定常な流れ場の x 方向速度が、 $u = Ax + By$ で表されることがわかっている。このとき、以下の問に答えよ。

1. y 方向速度 v を求めよ。
2. この流れ場がポテンシャル流れであるための条件を求めよ。
3. 速度ポテンシャルと流れ関数を求めよ。
4. 流線を描き、流れの方向を矢印で示せ。

【解】

1. 流れ場では必ず連続の式が満足されなければならない。与式から $\partial u / \partial x = A$ であるから、これを連続の式に代入すると次式を得る。

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -A \quad (12.5)$$

これを積分すれば、

$$v = -Ay + f(x) \quad (12.6)$$

となる。この段階では $f(x)$ の形は定まらない。

2. ポテンシャル流れ，すなわち渦なし流れでは式 (10.3) を満足しなければならない．与えられた u と式 (12.6) とを式 (10.3) に代入すれば，ポテンシャル流れになる条件として次式を得る．

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial f(x)}{\partial x} - B = 0 \quad (12.7)$$

これを積分して， $f(x)$ の最も簡単な形として定数項を 0 としたものをとれば，

$$f(x) = Bx \quad (12.8)$$

となり，これを式 (12.6) に代入すれば， v は次式となる．

$$v = Bx - Ay \quad (12.9)$$

すなわち u と v の係数 A と B は， u と v で無関係に定めてよいものではないことがわかる．

3. 速度ポテンシャルと u および v との関係から，

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = Ax + By, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = Bx - Ay \quad (12.10)$$

これらをそれぞれ積分すれば，

$$\phi = \frac{A}{2}x^2 + Bxy + g_1(y), \quad \phi = Bxy - \frac{A}{2}y^2 + g_2(x) \quad (12.11)$$

これらの二つの ϕ が同じであるためには $g_1(y) = -Ay^2/2$ ， $g_2(x) = Ax^2/2$ でなければならないので， ϕ は次式となる．

$$\phi = \frac{A}{2}(x^2 - y^2) + Bxy \quad (12.12)$$

流れ関数も同様に定義式から，

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = Ax + By, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = Bx - Ay \quad (12.13)$$

これらをそれぞれ積分して，

$$\psi = Axy + \frac{B}{2}y^2 + h_1(x), \quad \psi = -\frac{B}{2}x^2 + Axy + h_2(y) \quad (12.14)$$

これらは一致しなければならないから，結局 ψ は次式となる．

$$\psi = \frac{B}{2}(y^2 - x^2) + Axy \quad (12.15)$$

4. 流線は $\psi = \text{const.}$ の線群で与えられる．流線を描くために，簡単なように $A = B = 1$ とすれば，式 (12.15) は次式となる．

$$y = -x \pm \sqrt{2(x^2 + \psi)} \quad (12.16)$$

この式の ψ に適当な値を与えれば，流線は図 1 のようになる． $\psi = 0$ のとき原点で交わる二直線となる．

なお流れの向きは，流線上の座標 (x, y) を式 (12.10) の u と v に代入して， u と v の正負を知れば u と v で合成される速度 V の方向が図示のように容易に定められる．例えば x 軸上では $u = x$ ， $v = x$ であるから， $x > 0$ の領域では流れは右上に向いており， $x < 0$ の領域では，左下に向いている．

この流れは直線 AB を壁面とすれば，左上もしくは右下から壁面に向かって流れる流れを表していると解釈することができる．

13 渦運動

13.1 剛体渦と自由渦

紙面に垂直な z 軸の回りに任意半径 r の円周上を回転する ($V_r = 0$) 二次元的な円形の渦が、次に示すように $0 < r < a$ の中心領域では一定の角速度 ω であたかも剛体のよう回転速度 $V_\theta = r\omega$ で回転しており、その外側の領域 $r > a$ では渦度が 0 であるとする。すなわち、

$$\begin{cases} V_\theta = \omega r, & V_r = 0 & (0 \leq r \leq a) \\ \Omega_z = 0, & V_r = 0 & (r > a) \end{cases} \quad (13.1)$$

$$(13.2)$$

となる。中心領域 ($0 \leq r \leq a$) の渦度 Ω_z は、

$$\Omega_z = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_\theta}{r} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] \quad (13.3)$$

に、(13.1) を代入すれば、

$$\Omega_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) - \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\omega r^2) \right] = 2\omega \text{ (const.)} \quad (13.4)$$

である。すなわち、剛体的に回転運動している半径 a の円内には一定値 Ω_z の渦度が一様に分布している。このような渦を剛体渦 (solid vortex) または強制渦 (forced vortex) と呼ぶ。

$r > a$ の領域については、式 (13.3) と (13.2) から次式を得る。

$$\Omega_z = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rV_\theta) \right] = 0 \quad (13.5)$$

これを解けば、 $rV_\theta = \text{const.}$ となり、回転速度 V_θ は次式で与えられる。

$$V_\theta = \frac{c}{r} \quad (c = \text{const.}) \quad (13.6)$$

$r = a$ では式 (13.1) の速度と一致しなければならないから、定数 c は次式のように定まる。

$$\frac{c}{a} = \omega a \quad \text{ゆえに} \quad c = a^2 \omega \quad (13.7)$$

これを式 (13.6) に代入すれば、結局 V_θ は次式で表される。

$$V_\theta = \frac{a^2 \omega}{r} \quad (13.8)$$

ここで、式 (13.8) は外部から外部から何らの回転力をも加えていない場合の角運動量の保存則から得られる速度分布と同じである。このことから式 (13.8) で与えられる速度分布をもつ渦を自由渦 (free vortex) という。流れ場全体が式 (13.8) の速度で表される場合、渦の中心以外ではあらゆる点で渦度が 0 であるから、ポテンシャル渦ともいう。剛体渦の流れ場は図 4(a) に矢印で示すように、点 O の回りを 1 周する間に矢印も 1 回転しており、局所の流体部分が回転している渦運動である。これに対して自由渦の流れ場では、図 4(b) に示すように局所の流体部分は回転していない。

以上のように中心部が剛体渦で、その外側が自由渦で構成される渦をランキン渦 (Rankin's combined vortex) という。その渦の回転速度 V_θ の分布は以上の議論から図 5 に示すように中心 O から半径 a までは半径に比例して増加し、それ以上の半径位置では、半径に反比例した分布となる。実際の渦の例としてたつ巻や水中の渦などは、このランキン渦で近似することができる。

式 (13.8) は、渦度が 0 である $r > a$ の領域の速度分布であるが、その領域でも流体はぐるぐる回っていることに注意すべきである。

13.2 渦線，渦管，渦糸

(1) 渦線

図 13.1(a) に示すように，渦度が存在する流れ場の中に一つの曲線 A を想定する．この曲線上の任意の点における接線が，その点の流体の回転軸に一致するとき，この曲線を渦線 (vortexline) という．

(2) 渦管

図 13.1(b) に示すように，流れの中に一つの閉曲線 C を想定し，その曲線上の各点を通る渦線群で構成される管を渦管 (うずくだ，vortex tube) という．

(3) 渦糸

渦管で閉曲線 C を無限小さくしたものを渦糸 (うずいと，vortex filament) という．渦線と渦糸とは，それらの断面の考え方に違いがある．渦線の断面はいわゆる幾何学的に面積が 0 である点であるが，渦糸の場合は微小ではあるが有限の大きさの面積をもつという意味を暗に含んでいる．例えば力学で，ある有限の大きさの物体を質点として点で代表することに似た表現である．渦糸の断面内では渦度 Ω は一定であると考ええる．渦糸の断面積を σ とすれば渦糸の強さは次式の循環 Γ で定義される．

$$\Gamma = \Omega \sigma \quad (13.9)$$

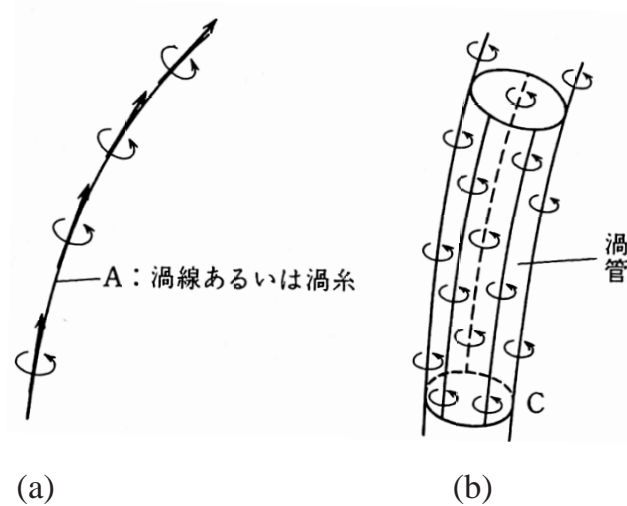


図 13.1 渦線，渦管，渦糸の定義

14 複素ポテンシャル

14.1 複素ポテンシャルの定義

二次元のポテンシャル流れ場では、前章で述べたように流れ関数 ψ と速度ポテンシャル ϕ はいずれもラプラスの方程式を満足する。このような性質を有する ϕ と ψ をそれぞれ実部と虚部とする次の複素関数

$$W(z) = \phi + i\psi \quad (14.1)$$

を定義することができる。この $W(z)$ を複素ポテンシャル (complex potential) という。ここで、

$$z = x + iy \quad (14.2)$$

であり、 i は虚数単位である。また図 14.1 に示すように、 (x, y) の直交座標系 (以下これを z 平面とよぶ) と (r, θ) の極座標系には、次の関係がある。

$$\begin{cases} z = r \exp(i\theta) \equiv r \cos \theta + ir \sin \theta \\ x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \end{cases} \quad (14.3)$$

$$(14.4)$$

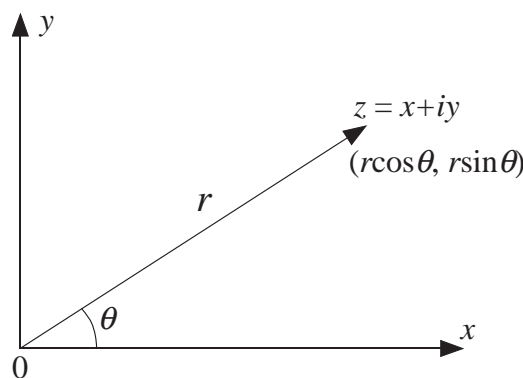


図 14.1 極座標と直交座標の関係

14.2 複素ポテンシャルの重要性

速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は次式 (14.5) で与えられるコーシー・リーマンの関係を満足する。

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (14.5)$$

複素関数論によれば、このことは ϕ と ψ を用いて式 (14.1) で定義された複素ポテンシャルが微分可能であること、すなわち解析関数であることを保証している。逆に任意の解析関数を、式 (14.1) のように実部と虚部に分けた場合の ϕ と ψ は、コーシー・リーマンの関係を満足するので、それらをそれぞれ速度ポテンシャルと流れ関数と定義することができる。

複素ポテンシャル $W(z)$ は、ただ一つの変数 z で ϕ と ψ を定義することができ、複素関数論に基づいて解析することができるので、流れを解析するのにきわめて便利なものである。また、その適用範囲がポテンシャル流れに限られるとはいったものの、完全流体の流れ場は渦の中心など面積のない点を除けば非回転であるので、完全流体の流れでは複素ポテンシャルを広範囲に使うことができる。

14.3 複素速度

式 (14.1) は z で微分することができ、それを実行すれば、

$$\begin{aligned}\frac{dW(z)}{dz} &= \frac{d\phi}{dz} + i \frac{d\psi}{dz} \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial\phi}{\partial y} \frac{dy}{dz} + i \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dz} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dz} \right)\end{aligned}\quad (14.6)$$

ここで，式 (14.7) と (14.8)

$$\frac{\partial\psi}{\partial y} = u, \quad \frac{\partial\psi}{\partial x} = -v \quad (14.7)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = u, \quad \frac{\partial\phi}{\partial y} = v \quad (14.8)$$

を代入し， $dz = dx + i dy$ を考慮すれば，上式は

$$\begin{aligned}\frac{dW(z)}{dz} &= u \frac{dx}{dz} + v \frac{dy}{dz} + i \left(-v \frac{dx}{dz} + u \frac{dy}{dz} \right) \\ &= (u - iv) \frac{dx + i dy}{dz} = u - iv\end{aligned}\quad (14.9)$$

となる．複素ポテンシャルを用いて流れを考える場合には， z 平面上での流れの速度 V は

$$V = u + iv \quad (14.10)$$

と定義することができ，これを複素速度 (complex velocity) という．この式と式 (14.9) とを比較すれば， dW/dz は複素速度 V の共役複素数になっていることがわかる．このことから $dW/dz = \bar{V}$ と書き， \bar{V} を共役複素速度 (conjugate complex velocity) という．

【例題】次式で与えられる複素ポテンシャル $W(z)$ を考える．

$$W(z) = U e^{-i\alpha} z \quad (14.11)$$

ここで，速度ポテンシャルを ϕ ，流れ関数を ψ とすると， $W(z)$ は $W(z) = \phi + i\psi$ と定義される．なお， $z = x + iy$ と定義し， i は虚数単位とする．また， U は一様流速を表し $U > 0$ ， α は角度を表し $0 < \alpha < \pi/2$ の範囲内で一定値を取るものとする．

このとき，以下の問いに答えよ．

1. 速度ポテンシャル ϕ ，ならびに流れ関数 ψ を求めよ．
2. x 方向の速度成分 u ，ならびに y 方向の速度成分 v を求めよ．
3. 流線を図示し，流れの方向を矢印により示せ．

【解答】

1. $W(z)$ を実部と虚部に分けると，

$$\begin{aligned}W(z) &= U (\cos \alpha - i \sin \alpha) (x + iy) \\ &= U (x \cos \alpha + y \sin \alpha) + i U (y \cos \alpha - x \sin \alpha)\end{aligned}\quad (14.12)$$

となる． $W(z) = \phi + i\psi$ より，

$$\begin{cases} \phi = U (x \cos \alpha + y \sin \alpha) \\ \psi = U (y \cos \alpha - x \sin \alpha) \end{cases} \quad (14.13)$$

となる．

2. 1. の解答より

$$\begin{cases} u = \frac{\partial\phi}{\partial x} = U \cos \alpha & \text{or} & u = \frac{\partial\psi}{\partial y} = U \cos \alpha \\ v = \frac{\partial\phi}{\partial y} = U \sin \alpha & \text{or} & v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} = U \sin \alpha \end{cases} \quad (14.14)$$

3. 流線は式 (14.13) において $\psi = \text{const.}$ で与えられるので,

$$y = x \tan \alpha + \frac{\psi}{U \cos \alpha} \quad (14.15)$$

となる． ψ に任意の値を代入することにより流線として図 14.2 に示す直線群が得られる．各流線上の点の速度は式 (14.14) から分かるように一様流速 U である．このような流れを一様流という．流れの方向は $U > 0$, $0 < \alpha < \pi/2$ の条件下においては, 式 (14.14) より $u > 0$, $v > 0$ が成立するので, 図 14.2 に示すような, 右斜め上向きの流れとなる．

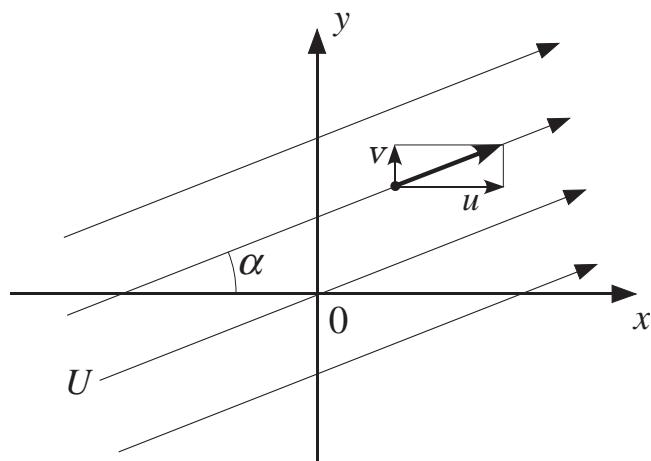


図 14.2 x 軸方向と α の角度をなす一様流

【例題】わき出しと吸い込み

次式で与えられる流れの流線と流れの向きを示せ．

$$W(z) = \frac{Q}{2\pi} \ln z \quad (14.16)$$

$\ln z$ の関数形の場合は，極座標系で考えた方が計算が容易である ($z = re^{i\theta}$) . そこで式 (14.4) を用いて，式 (14.16) を実部と虚部に分解すれば，

$$\begin{aligned} W &= \frac{Q}{2\pi} \ln r + i \frac{Q}{2\pi} \theta \\ \phi &= \frac{Q}{2\pi} \ln r, \quad \psi = \frac{Q}{2\pi} \theta \end{aligned} \quad (14.17)$$

となり，

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (14.18)$$

を用いると，

$$V_r = \frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = \frac{Q}{2\pi} \frac{1}{r}, \quad V_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \quad (14.19)$$

流線は式 (14.17) の ψ に種々の値を代入して得られる $\theta = \text{const.}$ の，原点を通る直線で与えられる．流れの向きは式 (14.19) から，

1. $Q > 0$ のとき，半径方向速度 V_r は θ にかかわらず正であるから，放射状外向き
2. $Q < 0$ のとき， $V_r < 0$ となり，放射状内向き

の流れとなる．1. の場合は，図 14.3(a) に示すように原点 0 から流れがわき出して，放射状に広がる流れを表し，これをわき出し (source) という．2. の場合は図 14.3(b) に示すように原点 0 へ流れが集中し，そこから吸い込まれていく流れを表し，吸込み (sink) という．流量は半径 r の円周を流体が放射状に V_r で流れるから，

$$2\pi r V_r = 2\pi r \frac{Q}{2\pi r} = Q \quad (14.20)$$

となり， Q は流量を表すことがわかる．

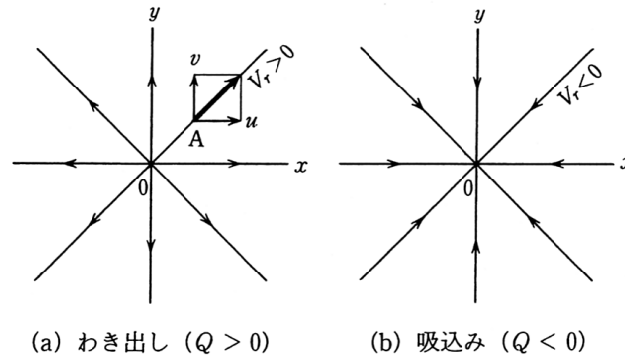


図 14.3 放射状流れ

15 物体に働く力

15.1 ブラジウスの第1定理

図 15.1 のように，完全流体の二次元の流れ場の中に，陰影で示すような任意断面形状の二次元の柱状物体がある．この物体に完全流体が及ぼす x と y 方向の力をそれぞれ X と Y とする．逆に物体が流体に及ぼす力は $-X$ と $-Y$ である．物体から十分離れたところでの主流の流れの方向が x 軸に一致していれば，流れ方向の力 X は抗力 (drag) となり，流れに垂直な力 Y は揚力 (lift) に一致する．以下では主流は x 軸に平行に流れているものとする．検査堆積に働く運動量のバランスを考えると，次式が導出される．

$$X - iY = \frac{i\rho}{2} \oint_S \left(\frac{dW}{dz} \right)^2 dz \quad (15.1)$$

この式は，複素ポテンシャルが与えられると，物体を囲む曲線 S について式 (15.1) の積分を行えば，流体力の x と y 方向の成分 X と Y 容易に求まることを示している．この関係をこの関係をブラジウス (Blasius) の第1定理という．

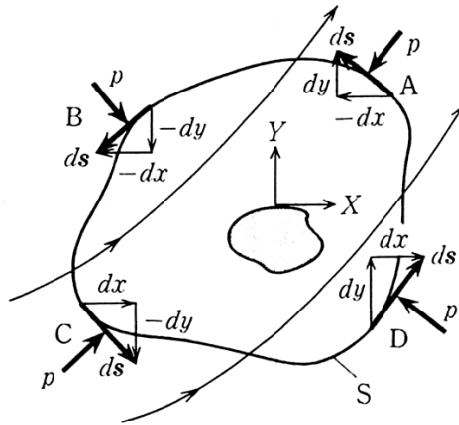


図 15.1 物体に働く力

15.2 任意形状の柱状物体に働く力

これはブラジウスの第1定理，式 (15.1) の応用である．解析関数 $W(z)$ の微分 $dW(z)/dz$ も解析関数であるから，これは次式のように，複素関数論におけるローラン展開で級数表示することができる．

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = U + \frac{A}{z} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z^3} + \cdots \quad (15.2)$$

この式には次のような利点がある．すなわち座標軸の原点は通常流れの中に置かれた物体の近くにとられるから，物体の影響を受けない $z \rightarrow \infty$ の領域で，式 (15.2) の右辺第2項以下は近似的に0となる．したがって第1項の定数項は物体が流れの中に存在しないときの主流速度を表す．式 (15.2) では無限遠 ($z \rightarrow \infty$) の流れが， x 軸に平行な一様流であると仮定して，定数項を U としている．これを積分すれば，次式となる．

$$W(z) = Uz + A \log z - \frac{B}{z} - \frac{C}{2z^2} + \cdots \quad (15.3)$$

この解析関数で表される一つの流線が物体形状と同じであれば，この式は複素ポテンシャルであり，一般的に第1項の一様流：式 (14.11)，第2項のわき出し：式 (14.16) や渦，二重わき出しなどで流れが構成されていることになる．式 (15.2) から，

$$\left(\frac{dW}{dz} \right)^2 = U^2 + 2U \frac{A}{z} + (A^2 + 2UB) \frac{1}{z^2} + \cdots \quad (15.4)$$

であるから，物体に働く力はこれを式 (15.1) に代入して積分すれば求まるが，複素関数論でよく知られているように，

$$\oint_S \frac{1}{z^n} dz = \begin{cases} 2\pi i & (n=1) \\ 0 & (n \text{ が } 1 \text{ 以外の整数}) \end{cases} \quad (15.5)$$

であることを考慮すれば，結局 $\log z$ の項による次の力だけが残る．

$$F (\equiv X - iY) = \frac{i\rho}{2} (2UA) (2\pi i) = -2\pi\rho UA \quad (15.6)$$

$\log z$ 形で表される複素ポテンシャルをもつ基本的流れには，一般に係数の違いにより，わき出しと渦 (反時計回りを正) があるので，

$$A = \frac{Q}{2\pi} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \quad (15.7)$$

とおけば，二つの流れを表すことが出来る．このとき式 (15.6) は次式となる．

$$X - iY = -2\pi\rho U \left(\frac{Q}{2\pi} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \right) = -\rho UQ + i\rho U\Gamma \quad (15.8)$$

したがって X と Y は，それぞれ次式で与えられる．

$$X = -\rho UQ, \quad Y = -\rho U\Gamma \quad (15.9)$$

物体に働く流体力のうち，主流と同じ方向の力を抗力，主流に直角な方向の力を揚力という．いまの場合式 (15.3)

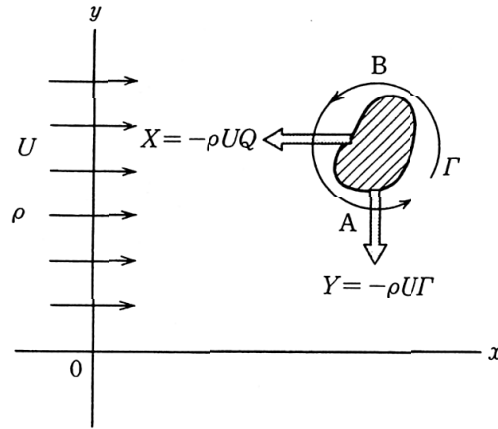


図 15.2 物体に働く力

の右辺第 1 項からわかるように，主流は x 軸に平行に流れているので，式 (15.9) の X は抗力， Y は揚力となる．わき出し Q による抗力 X と循環による揚力 Y が，式 (15.9) のような大きさになるということを，クッタ・ジューコフスキー (Kutta-Joukowski) の定理という．

通常は固体物体からのわき出し Q は 0 であるから，式 (15.9) は $X = 0$ ，つまり物体には抗力が働かないというダランベールのパラドックスを表している．またわき出しがある場合 ($Q > 0$) は流れに逆昇っていく力を受けることがわかる．図 15.2 のように反時計回りの循環がある場合， x の正方向に向いた流れの中では $Y < 0$ ，すなわち下方へ $\rho U\Gamma$ の力を受ける．これをマグナス効果 (Magnus effect) という．野球のボールに回転を与えると曲るのは，この効果による．一様流と循環とが重ね合わされて，物体の A 側の速度は B 側より大であるから，ベルヌーイの式から A 側の方が圧力が低くなる．したがって物体は B から A へ押されるのである．

【注 1】もし主流が x 軸に対して α だけ傾いている場合は，全体の流れは x 軸に平行な流れを角度 α だけ傾けたものとなる．したがって抗力や揚力の向きもそれに応じて α だけ傾く．

【注 2】揚力 L と抗力 D 以下のように無次元化したものを，それぞれ揚力係数 C_L ，抗力係数 C_D という．

$$\begin{cases} \text{揚力係数} & C_L = \frac{L}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \\ \text{抗力係数} & C_D = \frac{D}{\frac{1}{2}\rho U^2 A} \end{cases} \quad (15.10)$$

ここで A は代表面積で、通常主流に垂直な面への物体の投影面積をとる。ただし単独翼の場合は、翼面積をとる。

【問題】

円周に沿って時計回りの循環 Γ を有している半径 a の円柱を通過する一様流の複素ポテンシャルは、次式により与えられる。

$$W = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi} \log \left(\frac{z}{a} \right) \quad (15.11)$$

この流れにおいて、次の問に答えよ。

1. 流線の式を求め、流線を図示せよ。
2. 物体が流れから受ける力をブラジウスの第1定理から求めよ。
3. 円柱表面上の圧力分布を求めよ。
4. 圧力分布から物体が受ける力を求めよ。

【解】

1. 式 (15.11) に $z = re^{i\theta}$ を代入して、実部と虚部に分けた式から速度ポテンシャル ϕ と流れ関数 ψ は、次のように求められる。

$$\phi = U \left(r + \frac{a^2}{r} \right) \cos \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \theta \quad (15.12)$$

$$\psi = U \left(r - \frac{a^2}{r} \right) \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi} \log \left(\frac{r}{a} \right) \quad (15.13)$$

ψ に $r = a$ を代入すると、たしかに $\psi = 0$ となり、半径 a の円周上は一本の流線となっている。したがって、式 (15.13) が流線を与える式である。式 (15.11) から共役複素速度を求めると、

$$\frac{dW}{dz} = U \left(1 - \frac{a^2}{z^2} \right) + \frac{i\Gamma}{2\pi z} \quad (15.14)$$

となる。よどみ点では $u = v = 0$ すなわち $(dW/dz = 0)$ でなければならないから、式 (15.14) にその条件を代入して、 z について解けば、

$$\frac{z}{a} = -\frac{i\Gamma}{4\pi Ua} \pm \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi Ua} \right)^2} \quad (15.15)$$

となり、この z の値は Γ の値により次の三通りに分かれる。

(a) $\Gamma < 4\pi Ua$ のとき：

式 (15.15) の右辺第2項は実数であり、式 (15.15) は z 平面上の異なる二つの点の座標を与えるが、絶対値は、

$$\left| \frac{z}{a} \right|^2 = \left(-\frac{\Gamma}{4\pi Ua} \right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\Gamma}{4\pi Ua} \right)^2 \right] = 1$$

であるから、式 (15.15) を満足するよどみ点は、二つとも $z = a$ 、つまり円周上にある。

(b) $\Gamma = 4\pi Ua$ のとき：

よどみ点の座標は、

$$z = -\frac{i\Gamma}{4\pi U} = -\frac{i4\pi Ua}{4\pi U} = -ia$$

となり、よどみ点は半径 a の円周上でかつ y 軸上の一点に集まる。

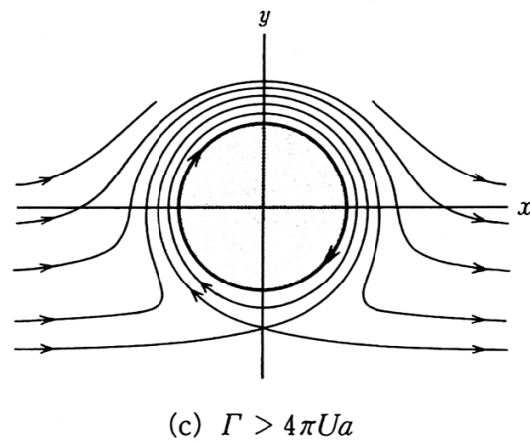
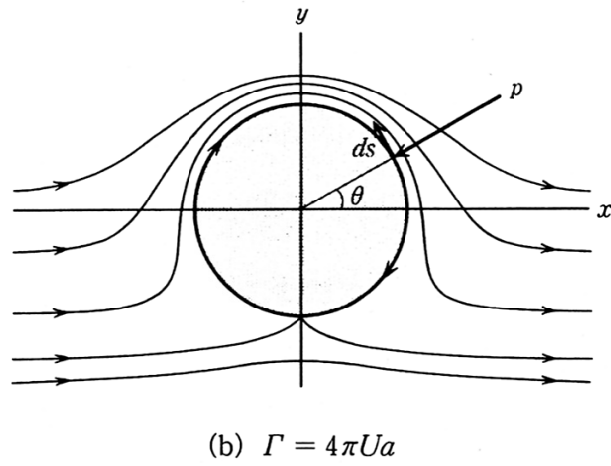
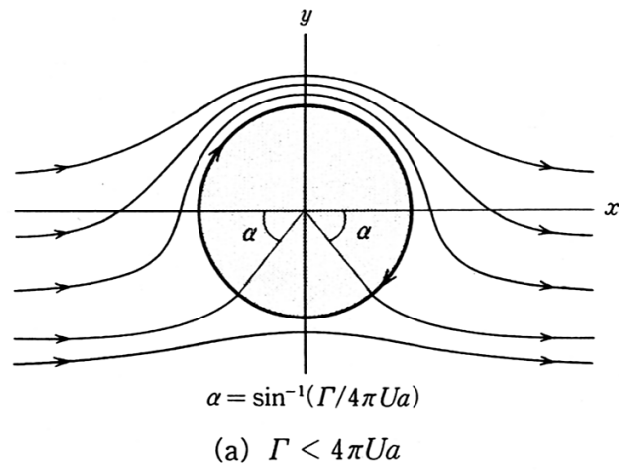


図 15.3 循環 Γ を有する円柱周辺の流れ

(c) $\Gamma > 4\pi Ua$ のとき：

よどみ点の座標は二つの純虚数になる．すなわち，よどみ点は二つとも y 軸上にあり，一つは円内にもう一つは円外にある．したがって実際の流れ場としては，円外の一点で流れはよどむ．これらの考察から流線を描くと，図 15.3 (a)~(c) のようになる．

2. 次式

$$\frac{dW}{dz} = u - iv = U + \frac{A}{z} + (\text{more than 2nd order terms}) + \dots$$

と式 (15.14) との比較から $A = i\Gamma/2\pi$ であり，物体は次のように， y 軸の正の向きにマグナス効果よる力を受ける．

$$X = 0, \quad Y = \rho U \Gamma \quad (15.16)$$

3. 円柱表面上の圧力はベルヌーイの式から

$$p = p_0 + \frac{\rho}{2}U^2 - \frac{\rho}{2}(V_\theta^2 + V_r^2) = p_0 + \frac{\rho}{2}U^2 - \frac{\rho}{2}V_\theta^2 \quad (15.17)$$

ただし p_0 は無限遠方での全圧である．円柱表面上の $V_r = 0$ であることは自明であり， V_θ は，式 (10.1) を用いれば，

$$\begin{aligned} V_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Big|_{r=a} = \frac{1}{a} \left[-U \left(a + \frac{a^2}{a} \right) \sin \theta - \frac{\Gamma}{2\pi} \right] \\ &= - \left(2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right) \end{aligned} \quad (15.18)$$

これらを式 (15.17) に代入すれば，円柱表面上の圧力分布は次式で与えられる．

$$\begin{aligned} p &= p_0 + \frac{\rho}{2}U^2 - \frac{\rho}{2} \left(2U \sin \theta + \frac{\Gamma}{2\pi a} \right)^2 \\ &= p_0 - \frac{\rho}{2} \left(-U^2 + 4U^2 \sin^2 \theta + \frac{2U\Gamma \sin \theta}{\pi a} + \frac{\Gamma^2}{4\pi^2 a^2} \right) \end{aligned} \quad (15.19)$$

ここで，円柱が ($\Gamma = 0$) 循環を有しない場合， $p = (p_{r=a})$ の分布を図示すると図 15.5 のようになる．図からわかるように，この場合圧力分布は，図 15.4 で円柱の中心を通り，一樣流に直交する面 BD および一樣流に平行な面 AC のいずれにも対称，すなわち円柱の上下方向，前後方向ともに全く対称である．したがって，流体から円柱に働く力を求めるために圧力を円柱の表面について面積積分した合力は 0 となる．完全流体の場合せん断応力は生じないから，円柱に作用する外力は圧力のみであることを考慮すれば，一樣流の中に置かれた円柱には全く何らの力も働かない．このことは，支えられなくても流れの中にある円柱は静止したままであることを意味している．

上述のことは球の場合も同じである．このことは，水と同じ密度の材料で作ったボールを水の流れの中に浮遊させたとき，ボールは流れとともに流れないで，静止していることを意味する．流れから物体が受ける流れ方向の力 (抗力, drag) は 0 である，という現実と反するこの結果を，ダランベールのパラドックス (d'Alembert's paradox) という．このように完全流体では抗力が生じないということが，完全流体を用いた流れの解析の最大の欠点である．

【注 5】図 15.5 からわかるように，円柱の後半部分，すなわち B, D のあたりから C に向う部分では円周に沿って圧力が急激に増加する．実在流体では円柱壁面近傍の境界層内の低エネルギー流体は，この部分で円の表面に沿って流ることができず，図 15.6 に示すように流れははく離してしまう．流れが遅くて，境界層の流れが層流の場合には， $\theta_S = 95^\circ \sim 100^\circ$ の近くから，早くも流れのはく離が生じる．完全流体の場合，この領域は流れ方向に圧力が下がる順圧力こう配の領域であるが，それにもかかわらず実在流体ではく離が生じる理由は，前縁分岐点 (前縁よどみ点) A から境界層が発達するため，完全流体として近似することのできる境界層外的主流領域が点 B の外側へと押しやられて，実質上円柱の径が大きくなる効果が生じ，主流の最大速度点が $\theta \approx 110^\circ$ に移動するからである．

境界層の流れが乱流の場合は，境界層内の流体が主流と激しく混合して，主流から流れのエネルギーをもらうために，境界層の発達が生流の場合より遅れて，はく離点 θ_S は 70° あたりになる．

【参考】はく離点が円柱後縁に近づくほど円柱にかかる抗力は小さくなる，ということは，上述のような完全流体と実在流体の流れの様子から容易に理解できるであろう．ゴルフボールの表面の小さいくぼみは，境界層を乱流化して，できるだけボールの後方まではく離が生じないようにして，抗力を低下させること，すなわちボールがよく飛ぶようにするための工夫である．しかし表面を過度に粗くすると流体との摩擦力が増加し抗力が増大する．つまりくぼみの形状には，この二つの相反する効果によって支配される，抗力を最小にする最適形状が存在するはずである．

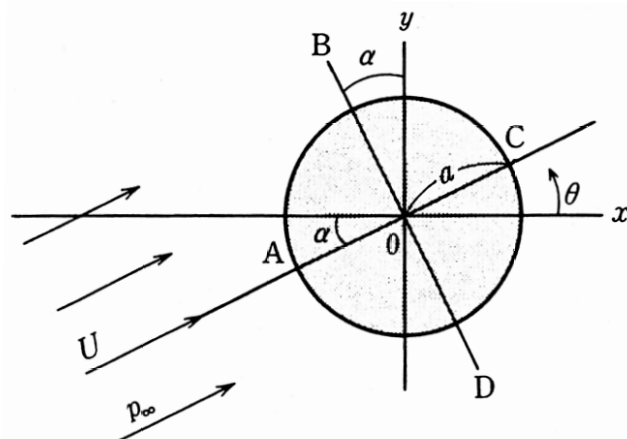


図 15.4 円柱を通過する流れ

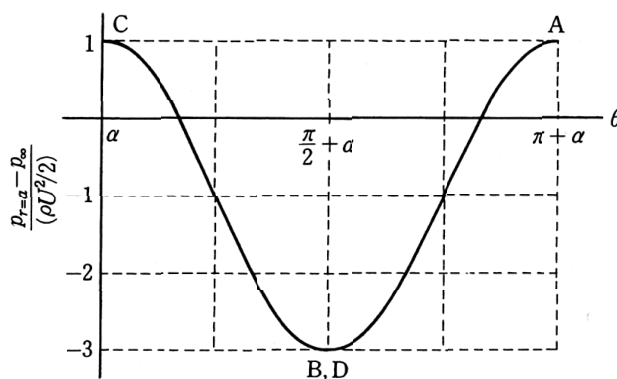


図 15.5 円柱表面の圧力分布

4. 図 15.3 (b) に示すように，円柱上の線要素 $ds (= a \cdot d\theta)$ に働く圧力による力は $pa \cdot d\theta$ であるが，これを x 成分と y 成分に分解すると，それぞれ $-pa \cdot d\theta \cos \theta$ と $-pa \cdot d\theta \sin \theta$ となるから，円周全体では次式により与えられる．

$$X = - \int_0^{2\pi} pa \cos \theta d\theta, \quad Y = - \int_0^{2\pi} pa \sin \theta d\theta \quad (15.20)$$

これらの式に，式 (15.19) を代入して積分を実行すれば，

$$X = 0, \quad Y = \rho U \Gamma \quad (15.21)$$

これらは (2) で，ブラジウスの第 1 定理から求めた値に一致している．ただし上の計算では次の公式を用いた．

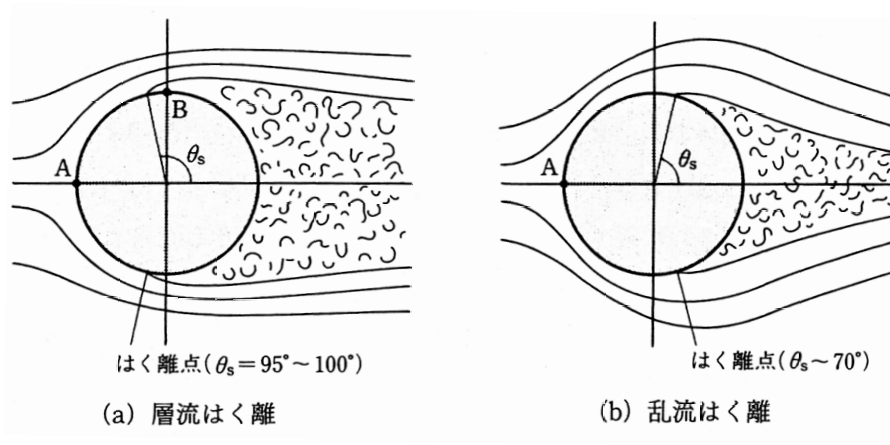


図 15.6 実在流体の円柱周りの流れ

$$\int \sin^2 \theta d\theta = -\frac{1}{4} \sin(2\theta) + \frac{\theta}{2}$$

【注】図 15.3 に示すように、式 (15.11) で与えられる流れは、 y 軸に関して対称であるから、 y 軸より右側の円柱表面に左向きに働く圧力による力と、左側の表面に右向きに働く圧力による力がつり合っており、抗力は 0 となる（完全流体の場合のみに成り立つ結果）。

16 等角写像

比較的単純な既知の流れから，変数変換をすることによって複雑な形状の物体周辺の流れを作り出す，等角写像 (conformal mapping または conformal transformation) を利用する方法について述べる．

二つの複素変数 $z = x + iy$ と $\zeta = \xi + i\eta$ とを一つの解析関数 f で関係づける．

$$z = f(\zeta) \quad (16.1)$$

この式により図 16.1 に示すように， ζ 平面上の一点は z 平面上の一点に対応づけられるから，これをくり返せば

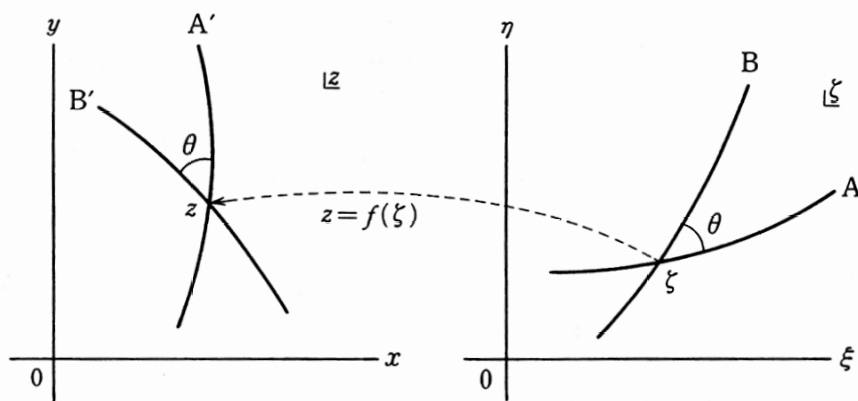


図 16.1 等角写像 (ζ 平面から z 平面への写像)

ζ 平面上の曲線は z 平面上の曲線に写される．このことを ζ 平面から z 平面への写像といい， $f(\zeta)$ を写像関数という． z 平面から ζ 平面への写像も可能である．

複素関数論によれば， ζ 平面で交わる二つの曲線がなす角は式 (16.1) によって z 平面に写像しても変わらない．このような写像を等角写像という．ただし $|df(\zeta)/d\zeta| = 0$ または ∞ になる点 ζ_0 (これを特異点という) の近くでは等角的ではない．

実際の流れ場を表す平面を物理平面というが，これを z 平面にとれば， z 平面では，速度ポテンシャル ϕ が一定の曲線と，流れ関数 ψ が一定の曲線とは直交する．このことは流れ場に要求される物理的基本条件であるから，式 (16.1) の写像関数によって写像された ϕ と ψ の直交性がくずれるようであれば，その ϕ や ψ はもはや流れ場を表さない．しかし上述のことからわかるように，幸いにも特異点のごく近くの領域を除けば写像平面である ζ 平面でもこれらは直交する．すなわち z 平面で速度ポテンシャルと流れ関数を表す曲線は，写像されてもそれぞれ速度ポテンシャルと流れ関数を表す．

16.1 ジューコフスキー変換

式 (16.1) の $f(\zeta)$ として次式，

$$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta} \quad (16.2)$$

で与えられるジューコフスキー変換 (Joukowski transformation) を用いれば，いろいろな流れが実現できる．以下にこの変換を用いた写像の例を述べよう．

【例題】一様な流れの中の円柱の周りの流れと，平板に平行な流れとの関係を論ぜよ．

【解】図 16.2(a) に示す z 平面の x 軸上に，厚さが無視できる平板があり，それに平行な一様流は，式 (14.11) で $\alpha = 0$ とした次の複素ポテンシャルで表される．

$$W(z) = Uz \quad (16.3)$$

また図 16.2(b) に示す，横軸に平行な一様流中の円柱周辺の流れは，すでに次の式 (16.4) で表されることを示した．

$$W(z) = U \left(z + \frac{a^2}{z} \right) \quad (16.4)$$

いま実際の流れ場 (物理平面) が図 16.2 (a) であり, これをジューコフスキー変換で写像することを考えてみよう. 式 (16.3) に (16.2) を代入すれば, 写像平面での複素ポテンシャルが得られるが, それは式 (16.4) で z を ζ で置き換えたものと一致し, その流れは図 16.2 (b) で示される. すなわち図 16.2 (b) の ζ 平面の流れは, 図 16.2 (a) の流れのジューコフスキー変換による写像である. 式 (16.2) に $\zeta = \pm a$ を代入すると $z = \pm 2a$ となる. これは半径 a の円が長さ $4a$ の平板に写像されることを意味しており, 点 A と B はそれぞれ点 A' と B' に対応する.

逆の場合, すなわち図 16.2 (b) の流れが物理平面である z 平面の流れであり, これを写像した ζ 平面の流れが, 図 16.2 (a) であるとすれば, その写像関数は, 式 (16.2) で z と ζ を入れ換えて z について解いた次式,

$$z = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2}}{2} \quad (16.5)$$

である. ここで, 分子につくべき負号は円の内側の流れを表すので省略している. これらの関係をまとめたのが図 16.3 である.

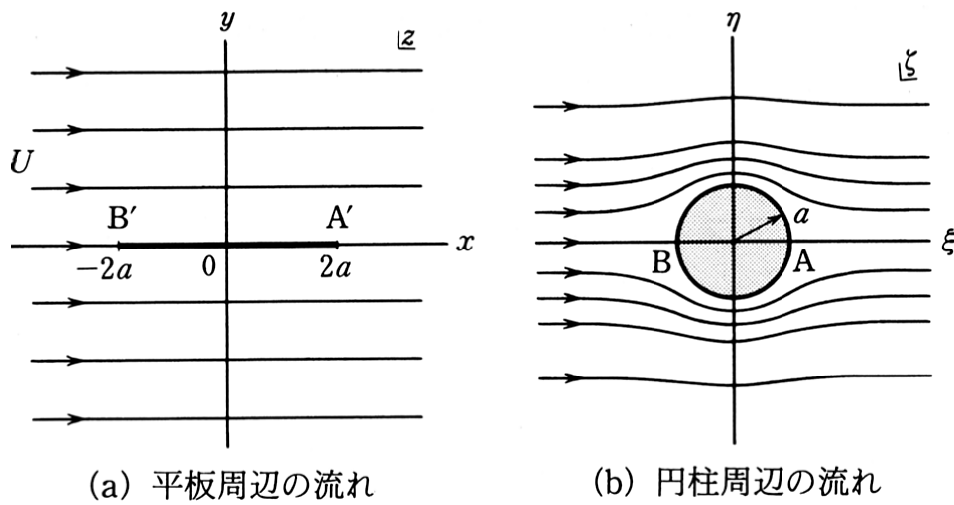


図 16.2 平板に平行な流れと円柱周りの流れ

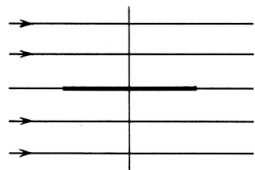
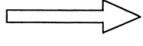
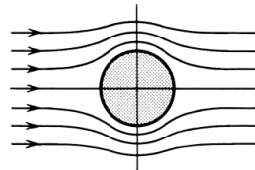
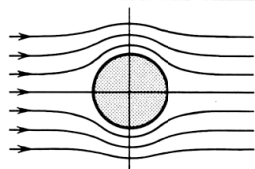
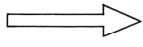
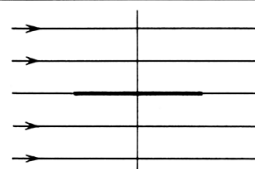
物 理 平 面	写 像 関 数	写 像 平 面
 $W = Uz$	$z = \zeta + \frac{a^2}{\zeta}$ 	 $W = U(\zeta + a^2/\zeta)$
 $W = U(z + a^2/z)$	$z = \frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 4a^2}}{2}$ 	 $W = U\zeta$

図 16.3

17 境界層の物理的意味

図 17.1(a) に示すように、くさび状の先端をもつ平板が主流に平行に置かれている場合、座標軸 x, y の原点にしているくさびの先端では、速度は y によらず一様に U である。 $x = 0$ より下流では、流れの速度 u は平板表面上では 0 であり、平板表面より十分離れた所では主流の速度 U に等しい。その間は (a) のように滑らかに連続的に変化しており、その中間で主流より速くなることはない。あるいは (b) のようにある点で速度が階段状に急変すること、すなわち流れにスリップ (slip) があつたり、(c) のようにある点だけの速度が不連続的に速かったり、遅かったりすることはない。もし速度にスリップがあるような流面があれば、そこでは速度こう配の絶対値 $|\partial u / \partial y|$ が無限大であるため、せん断応力 $\tau (\equiv \mu (\partial u / \partial y))$ が局所的に $+\infty$ または $-\infty$ にならなければならない。しかし流れが層流であるか乱流であるかにかかわらず、現実にはそのようなことは起こらない。図 17.1(a) の破線は、局

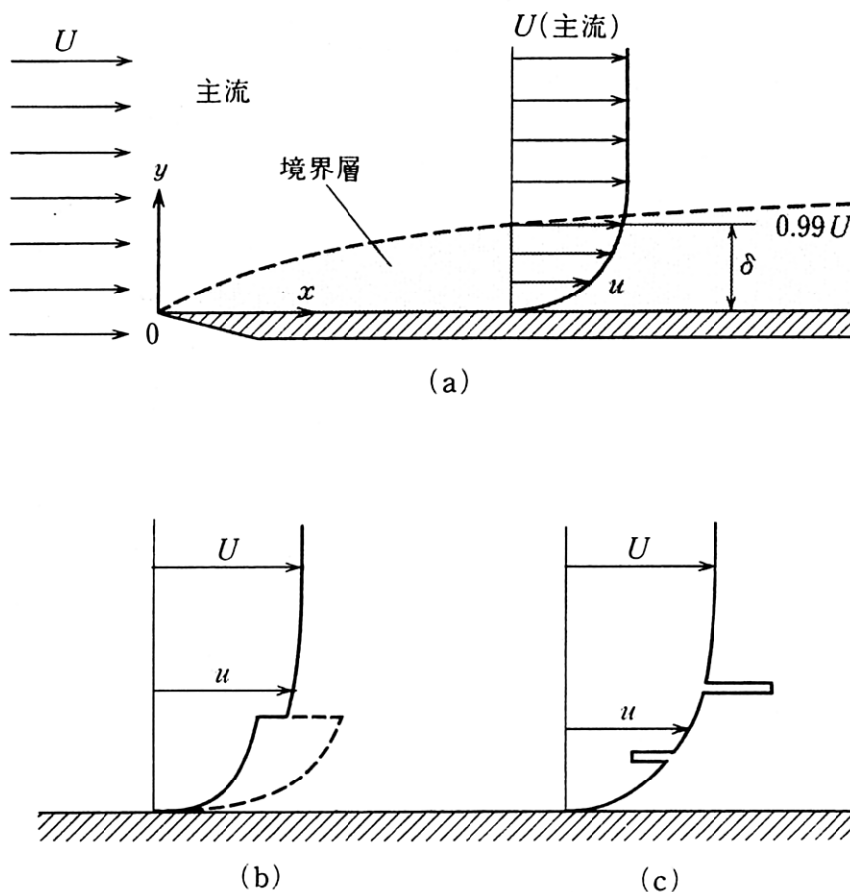


図 17.1 平板の上に発達する境界層と境界層厚さ δ の定義

所の速度がほぼ主流の速度に等しくなった点を連ねたものであるが、この線が示すように、境界層の厚さは流れ方向にだいに増していく。

簡単のため流れが層流であるとする、速度こう配が 0 でない境界層内では、 τ が 0 ではないが、主流領域では粘度 μ が 0 ではないにもかかわらず $\partial u / \partial y = 0$ 、すなわち $\tau = 0$ となるから、等価的に粘度 $\mu = 0$ とみなせる。このことがプラントルの境界層理論の妥当性を証明している。境界層内流体のエネルギーはどうなっているだろうか。平板より上流の領域および主流領域では、流体の速度は至るところ U であり、静圧も至るところ p であると考えて差しつかえないから、流体の全圧は至るところ $p + \rho U^2 / 2$ である。一方境界層内では $p + \rho u^2 / 2$ である。

流体の温度が一定で水平な流れでは、全圧が流体のもつエネルギーの指標になるが、一般に $U > u$ であるから、境界層内の流体のエネルギーは主流のそれより低い。すなわち境界層とは低エネルギーの流体粒子の集まった領域であり、それらの流体粒子は主流あるいは同じ境界層内の、速度の速い流体粒子から流れのエネルギーを貰いながら流れている、ということができる。このことから境界層内速度が主流速度より速くなることはないことも理解できるであろう。粘性によって生じた速度の減少量 $U - u$ を速度欠損 (量) (velocity defect) という。

ではなぜこのようなエネルギー損失が起こるのであるのかそれはすべて、物体表面上で速度が 0 とならなけれ

ばならないという境界条件 (non-slip) に起因するのである．すなわち境界層では速度こう配が 0 ではないためにエネルギーの損失が生じるのである．流れに関する重大な問題や事故，あるいは流れの複雑な現象は，このように低エネルギーの流体粒子の集積した層である境界層に起因するといっても過言ではない．以下では内部流れで生じる境界層の問題の例について述べよう．流路が流れ方向に狭くなる場合，例えばノズル (nozzle) 内の流れではベルヌーイの式からわかるように，静圧は下流 (x 方向) に向って減少する．このように下流に向って圧力が減少するときの圧力こう配，($\partial p / \partial x < 0$) を順圧力こう配 (favorable pressure gradient) という．順圧力こう配の場合には，たとえ境界層内の低エネルギー流体粒子であっても，静圧差によって上流から下流側へ力を受けて，下流へ流れることができる．一方ノズルとは反対に，下流に向って通路面積が広くなる場合，例えば速度エネルギーを圧力エネルギーに変換することを目的とするディフューザ (diffuser) のような場合には，静圧は下流に向って上昇する ($\partial p / \partial x > 0$) いわゆる逆圧力こう配 (adverse pressure gradient) となる．

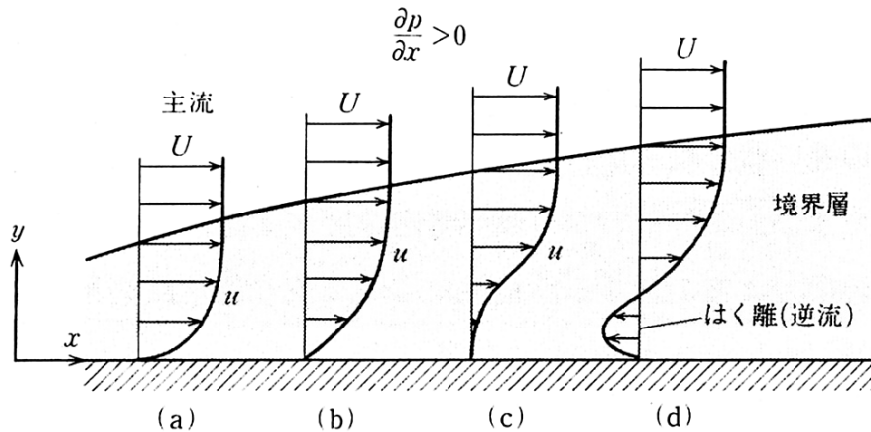


図 17.2 逆圧力こう配 ($\partial p / \partial x > 0$) の場合の速度分布の変化

逆圧力こう配の場合には境界層内の速度分布が図 17.2 に示すように変化していく．すなわち，ディフューザ入口断面では (a) のように，壁面では速度こう配 $\partial u / \partial y$ は正の十分大きな値をとるが，下流に流れるにしたがって低エネルギー流体が圧力によって減速され，壁面近傍の速度分布が下にとがってきて (b)，ついには壁面上で (c) のように $\partial u / \partial y = 0$ となる．さらに下流では壁面に隣接する流体はもはや下流側に流ることができず，逆流する．これを流れのはく離 (separation of flow) という．(c) の状態がはく離の開始点である．流れのはく離が生じると，飛行機の翼の場合には揚力が急減少し，作用する抗力が急増するので，飛行機は墜落しかねない．遠心ポンプや軸流ファンなどの流体機械の場合には，性能が急低下するなど重大な事故や問題が生じる．

【注】境界層は一般に薄いので，境界層内の静圧は主流の静圧に支配される．図 17.1(a) のような平板状外部流れの静圧は，全流れ場にわたって一定であると考えてよい．

18 境界層厚さ

18.1 境界層厚さ

境界層厚さ (boundary layer thickness) δ は，図 17.1(a) に示すように，局所の速度 u が主流速度 U の 99%，つまり $0.99U$ となった点までの壁面からの距離として定義される．しかし，速度の変化は，特に主流の近くではゆるやかであり，速度が 0.990 となる点を明確に決めることが難しい．そこで流れの理論的解析において物理的意味が明確であり，大きさを決定するのに也容易である，次の二つの境界層厚さがよく用いられる．

18.2 排除厚さ

排除厚さ (displacement thickness) は図 18.1 でハッチをつけた二つの部分の体積流量が等しくなる壁面からの距離 δ^* で定義される． δ^* の物理的意味は，固体壁面が $y = 0$ ではなく， $y = \delta^*$ の面にあると考え，その代りに

$y > \delta^*$ の全範囲で一様な速度 U をとる，すなわち $y > \delta^*$ の範囲では流れは完全流体の流れである，と考えたことに相当する．以上のことから δ^* は次式で定義される．

$$(U - 0) \delta^* = \int_0^\infty (U - u) dy$$

右辺は，境界層全域で生じる速度欠損 (velocity defect) $U - u$ による流量の全減少量を表し，左辺は， $0 < y < \delta^*$ の範囲で速度が 0 になるために生じる流量の減少量を表している．したがって δ^* は次式で表される．

$$\delta^* = \delta \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \quad (18.1)$$

ここで $\eta = y/\delta$ である．

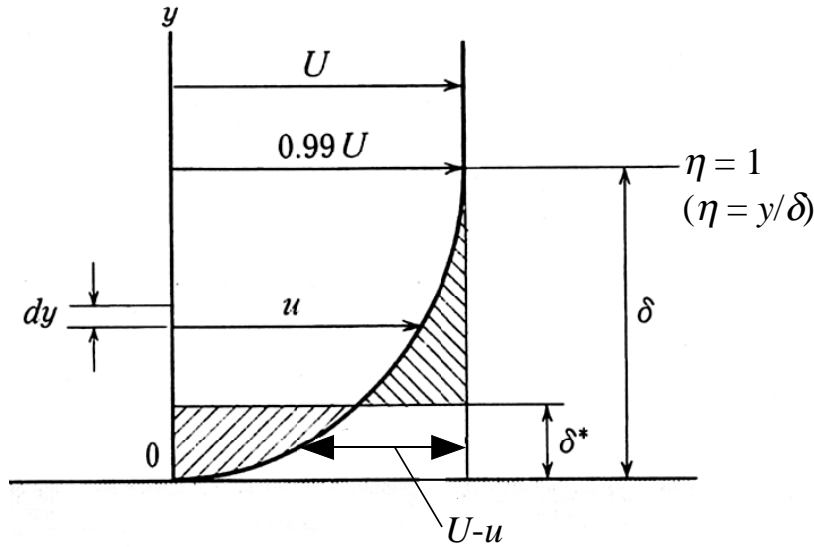


図 18.1 境界層の排除厚さ δ^* の定義

【注】前出の式の積分の上限は ∞ であるが，実際に計算する際には， y が δ の近くでは，速度欠損 $U - u$ は 0 に近く，上限を δ と考えて式 (18.1) では η の上限を 1 としている．この式では上限が少し変わっても， δ^* に与える影響は少ない．このため δ^* の決定は δ の決定よりやさしくなる．

18.3 運動量厚さ

図 18.2 で境界層内の dy の部分を流れている質量流量 $\rho u dy$ の流体の速度は，もし粘性がなければ U であるが，実際には u である．したがって粘性のため $\rho u(U - u) dy$ だけ運動量の欠損 (momentum defect) が生じたことになる．境界層の全範囲では，この欠損量は $\int_0^\delta \rho u(U - u) dy$ となる．この欠損のすべてが，壁面から θ までの範囲で速度 u が 0 となることによって生じると考えると，

$$\rho (U - 0)^2 \theta = \int_0^\delta \rho u (U - u) dy$$

が成り立つ．この式から運動量厚さ (momentum thickness) の定義式として次式を得る．

$$\theta = \int_0^\infty \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy \quad \text{あるいは} \quad \theta = \delta \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta \quad (18.2)$$

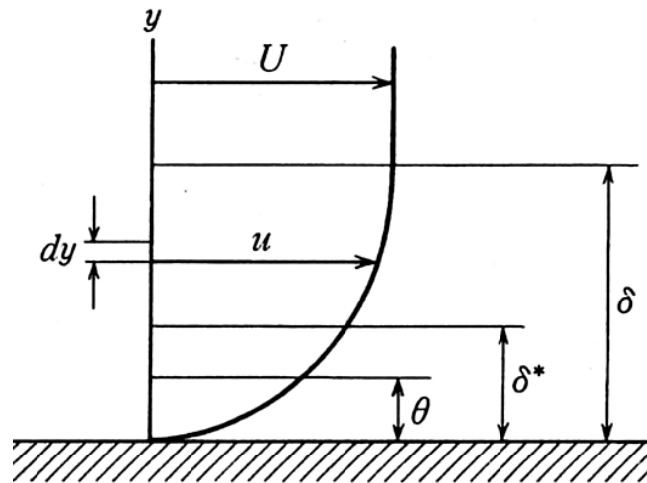


図 18.2 境界層の運動量厚さ θ の定義

18.4 形状係数

排除厚さ δ^* と運動量厚さ θ との比である，次式の H を形状係数 (shape factor) という．

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} \quad (18.3)$$

平板上の一様流の場合，流れが層流であれば $H = 2.6$ であり，乱流では乱れにより境界層内流体の主流の混合が活発化して，速度分布が一様化するため H が小さくなり， $H = 1.4$ となる． H は境界層にはく離が起こる徴候がないかどうかを判断する尺度にもなり， H が大なるほどはく離が生じやすい流れに近くなる．流れのはく離が生じ始めるのは層流状態の境界層 (層流境界層) の場合 $H = 3.5$ ，乱流境界層の場合 $H = 2$ 程度である．